§2 ĐỊNH THỨC

2.1 HOÁN VỊ VÀ NGHỊCH THẾ

Cho tập hợp hữu hạn $E = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Xét một hoán vị của các phần tử của E (đó là một song ánh P từ E vào chính nó):

$$P\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

với $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in E.$ Lấy hai số α_i, α_j trong một hoán vị của E. Nếu $\alpha_i > \alpha_j$ với $i > j$ thì ta nói các số α_i, α_j lập thành một nghịch thế.

Ví dụ: Trong hoán vị 3214 của 4 số 1234 thì có 3 cặp tạo thành nghịch thế, đó là $(3,2),(3,1),(2,1)$

Để α_i, α_j lập thành một nghịch thế thì $(\alpha_i - \alpha_j)(i - j) < 0$.

Ta ký hiệu $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ là tổng số tất cả các nghịch thế của hoán vị $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Trong ví dụ trên ta có: $I(3,2,1,4) = 3$.

Định nghĩa 1. Một hoán vị của E được gọi là *hoán vị chẵn* nếu tổng số các nghịch thế của nó là *chẵn hoặc bằng không*, *hoán vị là lẻ* nếu tổng số các nghịch thế của nó là *lẻ*.

Xét một hoán vị $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Nếu ta đổi chỗ hai phần tử α_i, α_j cho nhau còn các phần tử khác vẫn giữ nguyên thì ta nói đã thực hiện một *phép chuyển vị*. *Phép chuyển vị làm thay đổi tính chẵn lẻ của hoán vị.*

Ví dụ: Xét hoán vị $3,2,1,4$ của bốn số $1,2,3,4$. Ta có $I(3,2,1,4) = 3$. Nếu ta đổi chỗ 2 và 1 cho nhau (thực hiện một phép chuyển vị), khi đó $I(3,1,2,4) = 2$.

Bây giờ ta xét thêm một ví dụ để minh họa một tính chất khác của hoán vị.

Cho $E = \{1,2,3,4,5\}$ và xét một hoán vị của E là $5,3,4,2,1$.

$$P : E \to E \quad P\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Nó có 9 nghịch thế (hoán vị lẻ). Ta sắp xếp lại các cột của ma trận trên để đưa hàng 2 về thứ tự tự nhiên bằng cách thực hiện phép đổi chỗ các cột cạnh nhau.

Đổi chỗ cột 5 cho cột 4 rồi cho cột 3, cột 2 rồi cuối cùng cột 1, tức là thực hiện 4 phép chuyển vị.

$$P\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Tiếp tục đưa cột 5 của ma trận mới đến vị trí cột 2, tức là thực hiện 3 phép chuyển vị: $c5 \to c4 \to c3 \to c2$ $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Đổi chỗ cột 4 cho cột 3, thực hiện một phép chuyển vị:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Cuối cùng đổi chỗ cột 5 cho cột 4, thực hiện một phép chuyển vị:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Như vậy để đưa hàng 2 về thứ tự tự nhiên ta đã biến đổi ma trận xuất phát bằng đúng 9 phép chuyển vị hai cột cạnh nhau (bằng số nghịch thế ở hàng 2 của ma trận xuất phát). Sau mỗi phép chuyển vị đó hàng 1 thêm một nghịch thế, hàng 2 bớt đi một nghịch thế. Như vậy hàng 1 của ma trận cuối cùng có cùng số nghịch thế với hoán vị P Có thể coi hàng đó như một *hoán vị ngược* của P; ta biểu diễn nó bằng P^{-1}.

Phương pháp trình bày như trên có thể áp dụng cho bất kỳ hoán vị nào của tập hợp $E = \{1,2,\ldots,n\}$. Ta có kết quả tổng quát sau:

Định lý: *Nếu một hoán vị tùy ý $P : E \to E$ có k nghịch thế thì hoán vị ngược P^{-1} cũng có k nghịch thế.*

Ma trận: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$ được đưa về dạng: $\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$ bằng *k phép đổi chỗ hai cột cạnh nhau.*

2.2 ĐỊNH NGHĨA ĐỊNH THỨC

Cho ma trận vuông cấp 2 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Ta gọi định thức của ma trận 2 là định thức cấp 2, ký hiệu $\det(A)$, **là một số** xác định như sau:

$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Ta cũng ký hiệu định thức cấp hai bởi $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Giá trị của $\det(A)$ là tích của phần tử nằm trên đường chéo chính trừ đi tích các phần tử nằm trên đường chéo kia. Nói cách khác, đó là hiệu của hai số hạng, mỗi số hạng là tích của hai phần tử: mỗi phần tử nằm trên đúng một hàng và đúng một cột, chỉ số thứ nhất chỉ hàng chỉ số thứ hai chỉ cột, đó là hai hoán vị của hai số 1 và 2: đó là $(1,2)$ và $(2,1)$. Hoán vị sau có một nghịch thế, nó là lẻ; số hạng ứng với phần tử đó có dấu trừ.

Xét ma trận vuông cấp 3: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Định thức của ma trận A là định thức cấp 3, đó là số:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \qquad (1)$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Ta nhận xét rằng mỗi số hạng của định thức cấp 3 gồm tích của 3 phần tử, mỗi phần tử nằm trong đúng một cột và đúng một hàng. Các thừa số trong mỗi số hạng được viết theo quy tắc sau: Đầu tiên là phần tử ở hàng một rồi đến hàng hai, hàng ba. Chỉ số các cột của các thừa số đó lập thành một hoán vị của ba số $1,2,3$. Số các hoán vị của ba số là $3! = 6$ vừa bằng số các số hạng viết trong (1). Trong 6 hoán vị của $1,2,3$ thì các hoán vị $1,2,3$; $2,3,1$; $3,1,2$ là chẵn, chúng ứng với các số hạng mang dấu $+$ ở biểu thức của định thức viết trong (1), còn các hoán vị $3,2,1$; $2,1,3$; $1,3,2$ là lẻ, chúng ứng với các số hạng mang dấu $-$ ở (1).

Vì vậy ta có thể viết: $\det(A) = \sum (-1)^{I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3}$

Tổng được lấy theo mọi hoán vị của 123.

Dựa vào nhận xét trên ta có định nghĩa định thức cấp n.

Định nghĩa 2. Xét ma trận vuông A cấp n. Định thức của ma trận A là một số, ký hiệu là $\det(A)$, số đó được xác định bằng:

$$\det(A) = \sum (-1)^{I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n} \qquad (2)$$

trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là một hoán vị của n số $1,2,\ldots,n$, $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ là tổng các nghịch thế của hoán vị đó, tổng $\sum$ được lấy theo mọi hoán vị của n số $1,2,\ldots,n$ (có tất cả $n!$ hoán vị nên tổng đó chứa $n!$ số hạng).

Ta cũng ký hiệu định thức cấp n của ma trận A bằng:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2.3 CÁC TÍNH CHẤT CỦA ĐỊNH THỨC

Xét một định thức cấp n. Để thuận tiện cho việc phát biểu các tính chất của định thức ta ký hiệu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các cột của định thức và ta viết $D\left(A_1, A_2, \ldots A_n\right)$.

Tính chất 1. *Nếu một định thức có một cột được phân tích thành tổng của hai véc tơ cột, chẳng hạn $A_j = A_j' + A_j''$ thì ta có thể phân tích định thức thành tổng của hai định thức:*

$$D\left(A_1, A_2, \ldots, A_j' + A_j'', \ldots A_n\right) = D\left(A_1, A_2, \ldots, A_j', \ldots, A_n\right) + D\left(A_1, A_2, \ldots, A_j'', \ldots A_n\right)$$

Thật vậy trong biểu thức của định thức ở (2), mỗi số hạng trong tổng đều có chứa một phần tử nằm ở cột thứ j, ta chỉ việc thay phần tử đó bằng tổng $a_{ij}' + a_{ij}''$, sau đó ta tách tổng toàn bộ thành hai tổng: một ứng với các số hạng có chứa a_{ij}' một ứng với các số hạng có chứa a_{ij}''.

Tính chất 2. *Có thể đưa thừa số chung của một cột ra ngoài dấu định thức:*

$$D\left(A_1,\dots,kA_j,\dots A_n\right)=kD\left(A_1,\dots,A_j,\dots,A_n\right).$$

Mọi số hạng đều chứa k do đó ta chỉ việc đưa k ra ngoài dấu tổng.

Tính chất 3. *Đổi chỗ hai cột thì định thức đổi dấu.*

$$D\left(A_1,\dots,A_i,\dots,A_j,\dots A_n\right)=-D\left(A_1,\dots,A_j,\dots,A_i,\dots A_n\right)$$

Việc đổi chỗ làm thay đổi tính chẵn lẻ của hoán vị, do đó trong biểu thức (2) các số hạng mang dấu $+$ sẽ chuyển thành $-$ và các số hạng mang dấu $-$ sẽ chuyển thành $+$.

Hệ quả. *Định thức có hai cột giống nhau thì bằng không.*

Thật vậy, đổi chỗ hai cột giống nhau thì định thức không thay đổi nhưng theo tính chất 3 thì định thức đổi dấu, ta có $D=-D\Rightarrow D=0$.

Tính chất 4. *Nếu một cột của định thức là tổ hợp tuyến tính của các cột khác thì định thức bằng không.*

Chỉ việc áp dụng tính chất 1 để phân tích định thức thành tổng nhiều định thức, sau đó áp dụng tích chất 2 ta sẽ đưa về các định thức có hai cột giống nhau, chúng đều bằng không.

Hệ quả. Nếu thêm vào một cột của một định thức một tổ hợp tuyến tính các cột khác thì định thức không thay đổi:

$$D\left(A_1,\dots,A_j+\sum\alpha_iA_i,\dots,A_n\right)=D\left(A_1,\dots,A_j,\dots,A_n\right).$$

Tính chất 5. *Định thức của ma trận chuyển vị của ma trận A bằng định thức của ma trận A: $\det(A^t)=\det(A)$.*

Nói cách khác, *giá trị của định thức không thay đổi khi ta chuyển hàng thành cột, chuyển cột thành hàng, vẫn giữ nguyên thứ tự.*

Gọi các phần tử của ma trận A là a_{ij}, ta có:

$$\det(A)=\sum(-1)^{I\left(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\right)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n} \qquad (2)$$

Gọi các phần tử của ma trận chuyển vị A^t là b_{ij} tức là $b_{ij}=a_{ji}$ ta có:

$$\det(A)=\sum(-1)^{I\left(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\right)}b_{1\beta_1}b_{2\beta_2}\dots b_{n\beta_n}=\sum(-1)^{I\left(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\right)}a_{\beta_1 1}a_{\beta_2 2}\dots a_{\beta_n n} \quad (3)$$

Mỗi tích trong (3), chưa kể dấu, cũng là một tích trong (2) vì tích đó chứa các phần tử thuộc đúng một hàng và đúng một cột, dấu của chúng cũng như nhau vì hai hoán vị: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_n \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & ... & \beta_n \\ 1 & 2 & ... & n \end{pmatrix}$ có cùng số nghịch thế.

Từ đó ta có: $\det(A^t) = \det(A)$.

Tính chất 5 cho ta một kết quả quan trọng: *trong một định thức vai trò của cột và hàng là như nhau,* các tính chất đã đúng cho cột thì cũng đúng cho hàng , trong các phát biểu của các tính chất 1, 2, 3, 4 ta chỉ việc thay từ *cột* bằng từ *hàng.*

2.4 KHAI TRIỂN MỘT ĐỊNH THỨC

Công việc tính định thức cấp hai rất đơn giản. Vì vậy ta tìm cách đưa các định thức cấp cao về các định thức cấp hai.

1. Định thức con. Phần bù đại số

Cho ma trận vuông A cấp n. Ta gọi ***định thức con*** *của phần tử* a_{ij} *của ma trận* A *là định thức* D_{ij} *của ma trận nhận được từ ma trận* A *bằng cách xóa đi hàng* i *cột* j.

Như vậy D_{ij} là định thức cấp $n-1$.

Xét định thức cấp 3 của ma trận A.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Nhóm các số hạng có chứa a_{11} lại ta được: $a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) = a_{11}D_{11}$ với D_{11} là định thức con của phần tử a_{11}. Như vậy:

Tổng các số hạng chứa a_{11} *của định thức bằng tích của* a_{11} *với định thức con* D_{11} *của nó.*

Tính chất trên cũng đúng với định thức cấp n.

Bổ đề. *Trong định thức của ma trận vuông* A *cấp* n *có chứa* $(n-1)!$ *số hạng chứa* a_{11} *làm thừa số. Tổng của* $(n-1)!$ *số hạng đó bằng tích* $a_{11}D_{11}$ *với* D_{11} *là định thức con của phần tử* a_{11}.

Ta có: $$\det(A) = \sum (-1)^{I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n} \quad (2)$$

Tổng được lấy theo mọi hoán vị của n số $(1,2,\ldots,n)$. Một số hạng tùy ý chứa a_{11} làm thừa số khi và chỉ khi $\alpha_1 = 1$, còn lại $(\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ là một hoán vị của $n-1$ số và như vậy có $(n-1)!$ hoán vị tức là có $(n-1)!$ số hạng chứa a_{11}. Vì số nghịch thế của $(\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ cũng bằng số nghịch thế của $(1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$.

Khi cho $\alpha_1 = 1$ trong (2) ta có:

$a_{11}\sum(-1)^{I(1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n} = a_{11}\sum(-1)^{I(\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n} = a_{11}D_{11}$ (tổng sau cùng theo định nghĩa chính là định thức D_{11}).

Ta có một kết quả tổng quát hơn:

Trong định thức của ma trận vuông A cấp n có $(n-1)!$ số hạng chứa phần tử a_{ij} làm thừa số. Tổng của $(n-1)!$ số hạng đó bằng $(-1)^{i+j} a_{ij}D_{ij}$ với D_{ij} là định thức con của phần tử a_{ij}.

Thật vậy, xét một phần tử a_{ij} nào đó. Ta lần lượt chuyển hàng i của định thức lên hàng một bằng $i-1$ phép đổi chỗ hai hàng liên tiếp, định thức nhận được có phần tử a_{i1} nằm ở góc trái trên cùng. Bây giờ ta lại chuyển cột j (có chứa phần tử a_{ij}) lên vị trí cột 1 bằng $j-1$ phép đổi chỗ hai cột liên tiếp. Như vậy trong định thức cuối cùng này, ta gọi nó là $\det(A')$, phần tử a_{ij} sẽ nằm ở góc trái trên cùng (vị trí 1.1). Định thức cuối cùng $\det(A')$, được suy từ định thức xuất phát, $\det(A)$, bằng $i+j-1$ lần đổi chỗ, mỗi lần đổi chỗ định thức đổi dấu một lần, do đó: $\det(A) = (-1)^{i+j-2}\det(A') = (-1)^{i+j}\det(A')$

Theo bổ đề trên, các số hạng chứa a_{ij} sẽ bằng a_{ij} nhân với định thức con nhận được từ A' bằng cách bỏ đi hàng 1 và cột 1, định thức con đó cũng chính là định thức con của phần tử a_{ij} trong A. Vậy tổng các số hạng chứa a_{ij} trong det(A) là: $(-1)^{i+j} a_{ij}D_{ij}$.

Định nghĩa. *Phần bù đại số của phần tử a_{ij} trong ma trận A là $\pm D_{ij}$, lấy dấu cộng khi tổng chỉ số hàng và cột của a_{ij} là chẵn, dấu trừ nếu tổng đó lẻ.*

Ký hiệu phần bù đại số của a_{ij} là A_{ij} ta có: $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$.

2. Định lý khai triển

Với ma trận vuông A cấp n ta có:

$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$; $i = 1,2,...,n$ (khai triển theo hàng i)

$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}$; $j = 1,2,...,n$ (khai triển theo cột j)

Định lý này là kết quả của bổ đề trên khi ta nhóm các số hạng có chứa $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$ (hoặc $a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj}$) trong biểu thức của định thức.

Ví dụ 1: Tính định thức bằng cách dùng định lý khai triển:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ta khai triển theo hàng một:

$$D = 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3(6-4) - (-3+2) + 5(-4+4) = 7.$$

Dùng các tính chất của định thức ta có thể biến đổi sao cho trong định thức có chứa một hàng hoặc một cột gồm nhiều số không, sau đó ta chỉ việc khai triển theo hàng hoặc cột đó.

Ví dụ 2: Tính lại định thức D trong ví dụ 1.

Lấy hàng một cộng với 3 lần hàng hai rồi lấy hàng ba trừ đi hai lần hàng hai ta được:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \text{ (khai triển theo hàng ba)}$$

Ví dụ 3: Tính định thức cấp 4: $D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 & 6 \\ 4 & -5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix}$

Đem cột một trừ đi ba lần cột ba, sau đó đem cột bốn trừ đi hai lần cột ba:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 & 6 \\ -14 & -5 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -26 & 2 & 8 & -16 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -14 & -5 & -5 \\ -26 & 2 & -16 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -14 & -33 & 37 \\ -26 & -50 & 62 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -33 & 37 \\ -50 & 62 \end{vmatrix} = -392.$$

(trong định thức cấp ba ta lấy cột hai cộng hai lần cột một và cột ba trừ ba lần cột một).

3. Định thức của ma trận tích

Cho các ma trận vuông cấp hai: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

Tính tích $A.B$. Từ đó ta có: $\det(AB) = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$.

Ta có thể tách định thức trên thành bốn định thức:

Định thức 1 = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} b_{11}b_{12} = 0;$

Định thức 2 = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} b_{11}b_{22} = \det(A)\, b_{11}b_{22}$;

Định thức 3 = $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} b_{21}b_{12} = -\det(A)\, b_{21}b_{12}$

Định thức 4 = $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} b_{21}b_{22} = 0.$

Cuối cùng ta có: $\det(AB) = \det(A)(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) = \det(A)\det(B).$

Kết quả trên cũng đúng cho trường hợp A, B là các ma trận vuông cấp n:

Định thức của ma trận tích bằng tích các định thức của từng ma trận.

§3. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

Xét các ma trận vuông cấp n.

Định nghĩa. *Ma trận A là khả nghịch nếu tồn tại ma trận B cùng cấp sao cho: $A.B = B.A = I$* (1)

Với I là ma trận đơn vị cùng cấp.

Khi đó ma trận B được gọi là **ma trận nghịch đảo** của ma trận A, ta ký hiệu nó bằng A^{-1}. Ta có: $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$

Ta sẽ xét xem với điều kiện nào của A thì nó là khả nghịch?

Định lý. *Để ma trận A là khả nghịch thì điều kiện cần và đủ là **định thức của ma trận A phải khác không.***

$$A \text{ khả nghịch } \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

* *Điều kiện cần.* Giả sử A khả nghịch, khi đó tồn tại ma trận A^{-1} để: $A.A^{-1} = I$. Theo định lý về định thức của tích hai ma trận ta có:

$\det(A.A^{-1}) = \det A.\det(A^{-1}) = \det(I) = 1 \neq 0; \Rightarrow \det(A) \neq 0$

* *Điều kiện đủ.* Giả sử $\det(A) \neq 0$. Ta phải đi tìm một ma trận B thỏa mãn (1).

Ta vẫn gọi a_{ij} là các phần tử của ma trận A và A_{ij} là phần bù đại số của phần tử a_{ij} trong ma trận A.

Chuyển vị ma trận A ta được ma trận A^t. Như vậy nếu $A = (a_{ij})$ thì $A^t = (a_{ji})$

Thay trong ma trận A^t các phần tử a_{ji} bởi phần bù đại số A_{ji} của chúng ta được một ma trận mới, ta gọi ma trận đó là ma trận phụ hợp của ma trận A và ký hiệu nó là $\tilde{A}$. Như vậy $\tilde{A} = (A_{ji})$.

Bây giờ ta xét tích $A.\tilde{A}$ và $\tilde{A}.A$.

Lấy hàng i trong ma trận A nhân với cột k trong ma trận $\tilde{A}$ ta được phần tử c_{ik} ở vị trí i,k trong ma trận tích.

Các phần tử trong hàng i của ma trận A là $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$;

Các phần tử trong cột k của ma trận $\tilde{A}$ là $A_{k1}, A_{k2}, \ldots, A_{kn}$; (2)

Nếu $k = i$ thì các phần tử c_{ii} sẽ là các phần tử nằm trên đường chéo chính của ma trận tích. Ta có:

$c_{ii} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in} = \det(A)$ (khai triển theo hàng i).

Nếu $k \neq i$ ta xét ma trận A' là ma trận nhận được từ A bằng cách thay hàng k bởi hàng i, các hàng khác không thay đổi.

Như vậy ma trận A' có hàng k là: $a_{i1}, a_{i1}, ..., a_{in}$ (3).

còn các hàng khác giống như các hàng tương ứng của ma trận A. Vì vậy khi ta gạch hàng k cột j của ma trận A' thì các phần tử còn lại của ma trận A' cũng giống như các phần tử còn lại của ma trận A khi ta gạch hàng k cột j. Từ đó suy ra các phần bù đại số của các phần tử nằm trên hàng k cột j của A và A' là như nhau: $A_{kj} = A'_{kj}$.

Thay vào (2) ta được: $c_{ik} = a_{i1}A'_{k1} + a_{i2}A'_{k2} + ... + a_{in}A'_{kn}; \qquad i \neq k.$

Đó chính là công thức khai triển của $\det(A')$ theo hàng k [để ý tới (3)].

Nhưng $\det(A')$ có hai hàng giống nhau (các phần tử của hàng k và hàng i cùng là $a_{i1}; a_{i2}, ..., a_{in}$) do đó $\det(A') = 0$ tức là $c_{ik} = 0$ với $i \neq k$.

Tóm lại, các phần tử c_{ik} của ma trận tích $A.\tilde{A}$ là:

$$c_{ik} = \begin{cases} \det(A), & \text{khi } i = k \\ 0 & \text{khi } i \neq k \end{cases}$$

Ma trận $A.\tilde{A}$ khi đó là ma trận chéo có các phần tử nằm trên đường chéo chính bằng det(A), từ đó ta có: $A.\tilde{A} = \det(A).I$

Vì $\det(A) \neq 0$ nên: $A.\left(\frac{1}{\det(A)}\tilde{A}\right) = I$

Tương tự ta cũng chứng minh được: $\left(\frac{1}{\det(A)}\tilde{A}\right)A = I$

Vậy ma trận nghịch đảo của ma trận A là: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}.$

Tóm lại, để tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A ta thực hiện các bước sau:

- Tính $\det(A)$. Nếu $\det(A) = 0$ ma trận A không khả nghịch (không có ma trận nghịch đảo), còn nếu $\det(A) \neq 0$, ma trận A khả nghịch.
- Chuyển vị ma trận A rồi thay các phần tử của A^t bằng các phần bù đại số của chúng ta được ma trận phụ hợp $\tilde{A}$.
- Cuối cùng ta có $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\tilde{A}$

Ví dụ 1. Chứng tỏ rằng ma trận A dưới đây là khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo của nó:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Ta có $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -4.$ Ma trận A là khả nghịch.

Chuyển vị ma trận A ta được: $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Thay các phần tử của A^t bằng các phần bù đại số của chúng ta được ma trận phụ hợp:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Vậy ma trận nghịch đảo của ma trận A là:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ \frac{7}{4} & \frac{-9}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Ví dụ 2. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ có $\det(A) = 0$ nên không có ma trận nghịch đảo.

§4. HẠNG CỦA MA TRẬN

4.1 ĐỊNH NGHĨA HẠNG CỦA MA TRẬN

Cho A là ma trận loại $m \times n$. Nếu ta lấy ra k hàng và k cột thì các phần tử nằm trên giao điểm của các hàng và các cột lấy ra đó lập thành một ma trận vuông cấp k.

Định thức của ma trận vuông đó được gọi là *định thức con cấp k trích từ ma trận A*. Một ma trận loại $m \times n$ có rất nhiều định thức con các cấp khác nhau, mỗi phần tử của A là một định thức con cấp một, cấp lớn nhất của định thức con trích từ A là số nhỏ nhất trong hai số m, n.

Định nghĩa. *Cấp lớn nhất của các định thức con khác không trích từ ma trận A được gọi là **hạng của ma trận A.***

Hạng của ma trận A được ký hiệu bằng $r(A)$.

Ví dụ. Tìm hạng của các ma trận:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Hạng của A lớn nhất là 2. Ta có $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$. Vậy $r(A) = 2$.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Hạng của B lớn nhất bằng 3. Định thức $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & 8 & -12 \end{vmatrix} = 0$ vì có hai hàng tỷ lệ. Các định thức cấp ba khác cùng bằng không vì chứa một hàng gồm toàn phần tử không. Mọi định thức cấp hai cũng đều bằng không do có hai hàng tỷ lệ. Vậy hạng của B bằng 1.

4.2 CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN MA TRẬN

Định nghĩa. *Các phép biến đổi sơ cấp* trên ma trận là các phép biến đổi sau:

Phép chuyển vị ma trận.

Phép đổi chỗ các hàng hoặc các cột.

Bỏ khỏi ma trận một hàng hoặc một cột gồm toàn phần tử không.

Bỏ khỏi ma trận một hàng hoặc một cột là tổ hợp tuyến tính của các hàng hoặc cột khác.

Nhân một hàng hoặc một cột với một số khác không.

Cộng vào một hàng hoặc một cột một tổ hợp tuyến tính của các hàng hoặc cột khác.

Dùng các tính chất đã biết của định thức ta có thể chứng tỏ được rằng: *thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận không làm thay đổi hạng của ma trận.*

Vì vậy ta có thể dùng các phép biến đổi sơ cấp để tìm hạng của ma trận.

Ví dụ. Tìm hạng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 8 & 3 & 19 & 11 \end{pmatrix}$

Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp lần lượt như sau:

Đem hàng hai trừ hai lần hàng một, hàng ba trừ tám lần hàng một;

Bỏ hàng ba vì nó tỷ lệ với hàng hai; đem hàng hai chia cho -7

Hạng A = Hạng $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & 21 & 21 & 21 \end{pmatrix}$ = Hạng $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Có một định thức cấp hai bằng 1. Vậy hạng A bằng 2.

BÀI TẬP

3.1 Cho các ma trận $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&2\end{pmatrix}$ và $B=\begin{pmatrix}-1&5&-2\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

Tìm $A+B, 3B, A+2B, A^t, B^t$.

3.2 Cho các ma trận $A=\begin{pmatrix}2&1&5\\1&3&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3&4\\-1&2\\2&1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-1\end{pmatrix}$.

Tìm $A.B; B.C$. Chứng tỏ rằng $(A.B).C=A.(B.C)$

3.3 Cho các ma trận $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-1\end{pmatrix}$. Hãy nghiệm lại rằng $(A.B)^t=B^t.A^t$.

3.4 Cho các ma trận $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}, J=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

1) Chứng minh rằng $A=3I+J$ với I là ma trận đơn vị cấp ba.

2) Tính J^2 và bằng phương pháp quy nạp hãy chứng minh rằng $A^n=3^n+a_nJ$ với a_n là một số có thể xác định được. Viết ma trận A^n.

3.5 Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&2&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$

1) Tính A^2 và A^3. Nghiệm lại rằng ta có $A^3-A^2-A+I=0$ với I là ma trận đơn vị cấp ba.

2) Chứng tỏ rằng ma trận A là khả nghịch. Hãy suy ra A^{-1} từ hệ thức trên.

3.6 Cho ma trận A là ma trận vuông cấp ba mà mọi phần tử thuộc đường chéo chính bằng không, các phần tử khác bằng 1.

1) I là ma trận đơn vị cấp ba. Xác định các số thực a, b sao cho ma trận $P=aA+bB$ thỏa mãn hệ thức $P^2=I$.

2) Tìm ma trận I.

3.7 Xét các ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu A khả nghịch thì hệ thức $A.B=0$ kéo theo $B=0$ và nếu B khả nghịch thì từ hệ thức đó ta suy ra $A=0$. Từ đó suy ra rằng nếu $A.B=0$ thì hoặc $A=0$ hoặc $B=0$ hoặc cả hai không khả nghịch. Tìm ma trận khả nghịch A sao cho $A^2=A$.

3.8 Tính các định thức:

$$1)\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}; \qquad 3)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

3.9 Dùng các tính chất của định thức chứng tỏ rằng:

$$1)\begin{vmatrix} 84 & 35 & 62 \\ 8 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}=0; \qquad 2)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} \text{ chia hết cho 15.}$$

3.10 Tìm x để các véc tơ $(x,a,a),(a,x,b),(b,b,x)$ thuộc không gian R^3 là phụ thuộc tuyến tính.

3.11 Chứng minh rằng các véc tơ:

$V_1=(0,1,2,3), V_2=(1,2,3,4), V_3=(2,3,4,0), V_4=(3,4,0,1)$ thuộc không gian R^4 là độc lập tuyến tính.

3.12 Chứng tỏ rằng các ma trận sau đây là khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo của chúng:

$$1)\, A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}; \quad 2)\, B=\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.13 Tìm hạng của các ma trận:

$$1)\, A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}; \qquad 2)\, B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & -8 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

3.14 Chứng minh rằng tập hợp M các ma trận vuông cấp hai với các phần tử là số thực $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ là một không gian con của không gian các ma trận vuông cấp hai. Tìm một cơ sở và số chiều của không gian con đó.

3.15 Tính các định thức:

$$1)\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}$$

3.16 Cho ma trận: $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

1) Tính tích $A.A^t$. Suy ra rằng A là khả nghịch và tìm A^{-1}.

2) Tính A^k với k là số nguyên bất kỳ.

3) Suy ra công thức của $\cos 3\alpha$ theo $\cos\alpha$.